

Poglavlje 1

Funkcije

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Definicija 1.1.1 *Neka su X i Y dva neprazna skupa. Ako je po nekom pravilu, označimo ga sa f , svakom elementu x iz X pridružen točno jedan element y iz Y , kažemo da je na skupu X zadana funkcija f sa vrijednostima u Y .*

To simbolički označavamo sa $f : X \rightarrow Y$. Skup X nazivamo *područje definicije* ili *domena* funkcije f , a skup Y *područje vrijednosti* ili *kodomena* of f . Vrijednost x zovemo ponekad *varijabla*. Ako je kodomena funkcije f podskup skupa realnih brojeva \mathbb{R} , kažemo da je f *realna* funkcija.

Neka je zadana funkcija $f : X \rightarrow Y$. Podskup skupa Y ,

$$f(X) = \{y | y = f(x), \quad x \in X\}$$

zove se *slika funkcije* f .

Graf realne funkcije realne varijable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je skup točaka ravnine $\Gamma_f = \{(x, f(x)) = x \in X\}$.

1. Izračunajte $f(-1), f(0), f(1), f(3)$ i $f(5)$ ako je $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$.
2. Neka je $f(x) = 2x + 3$. Odredite:
 - (a) $f(-2), f(1)$ i $f(\frac{1}{4})$,
 - (b) $f(a^2)$,
 - (c) $f^2(a)$,
 - (d) $f(1) - f(-1)$ i $f(a^2 + 1) - f^2(a + 1)$.
3. Odredite $f(0), f(-1)$ i $\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$ ako je $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
4. Odredite linearnu funkciju $f(x) = ax + b$ ako je
 - (a) $f(-2) = 10$ i $f(1) = -5$,
 - (b) $f(-3) = 3$ i $f(b) = 0$.
5. Odredite kvadratnu funkciju $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ako je:

- (a) $f(-1) = -1, f(3) = -3$ i $f(6) = 12,$
 (b) $f(-\sqrt{2}) = -4, f(2) = -5$ i $f(2\sqrt{2}) = -7.$

6. Neka je dano pridruživanje:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ 3x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Da li je f funkcija?

7. Neka je

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Pokažite da je

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

8. Izračunajte $f(x+1)$ ako je $f(x-1) = x^2.$

9. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

napišite pomoću jedne formule koristeći se oznakom apsolutne vrijednosti.

10. Odredite graf funkcije $f, \Gamma_f,$ ako je:

- (a) $f(x) = 3x + 4$ i $x \in \mathbb{R},$
 (b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ i $x \in [-1, 1]$
 (c) $f(x) = |x|$ i $x \in \mathbb{R},$
 (d) $f(x) = A \sin 2x$ i $x \in \mathbb{R},$
 (e) $f(x) = x + \cos x$ i $x \in \mathbb{R},$
 (f) $f(x) = \arctan(x+1) - 1$ i $x \in \mathbb{R},$
 (g) $f(x) = \arcsin(\sin x)$ i $x \in \mathbb{R}.$

Definicija 1.1.2 Za funkciju $f : X \rightarrow Y$ kažemo da je *injekcija* ako za bilo koja dva elementa $x_1, x_2 \in X$ iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$ ili, ekvivalentno tome, ako iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2.$ Ako je $f(X) = Y,$ tj. ako za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $f(x) = y,$ kažemo da je f *surjeksija*. Za funkciju koja je istovremeno i surjeksija i injeksija, kažemo da je *bijeksija*.

1. Provjerite injektivnost slijedećih funkcija:

$$(a) f(x) = 3, \quad (b) f(x) = 2x + 1, \quad (c) f(x) = \frac{2x-1}{3-x}.$$

2. Pokažite da je funkcija $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definirana sa $f(x) = x^2 + 2x + 3$ injektivna.

3. Neka je $f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$ Odredite Y tako da $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$ bude surjeksija.

Definicija 1.1.3 Neka su zadane dvije funkcije, $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y_1 \rightarrow Z$ uz uvjet $Y \subset Y_1$. Funkcija koja svakom elementu $x \in X$ pridružuje element $g(f(x)) \in Z$ zove se kompozicija funkcija f i g i označava sa $g \circ f$.

Dakle, po definiciji je

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Neka je sada $f : X \rightarrow Y$ injekcija. Onda za svaki element $y \in f(X)$ postoji jedinstveni $x \in X$ takav da je $y = f(x)$. To nam omogućuje da definiramo novu funkciju, f^{-1} .

Definicija 1.1.4 Funkcija $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ koja svakom elementu $y \in f(X)$ pridružuje $x \in X$ sa svojstvom da $f(x) = y$ zove se inverzna funkcija polazne funkcije f .

Jasno, ako je polazna funkcija f bijekcija, onda $f(X) = Y$ pa imamo $f^{-1} : Y \rightarrow X$. U tom slučaju očito vrijedi

$$f^{-1} \circ f = id_X \quad \text{i} \quad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

1. Neka je $f(x) = x^3 - x$. Odredite:

$$(a) \quad f \circ f, \quad (b) \quad f \circ (f \circ f)(-1).$$

2. Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 3 - x^2$. Da li vrijedi $f \circ g = g \circ f$? Za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f \circ g(x) = g \circ f(x)$?

3. Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ i $h(x) = x^2 + 3$. Provjerite: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Napomena: Navedena tvrdnja, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, vrijedi za sve funkcije f , g i h za koje su te kompozicije dobro definirane, tj. operacija kompozicije ima svojstvo asocijativnosti.

4. Neka je $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 1$ i $h(x) = x^2$. Da li vrijede jednakosti:

$$(a) \quad k \circ (g + f) = k \circ g + k \circ f, \quad (b) \quad (g + f) \circ h = g \circ h + f \circ h?$$

5. Za funkciju $f(x)$ izračunajte inverznu funkciju ako je

- (a) $f(x) = x^2 - 1$,
- (b) $f(x) = \log \frac{x}{2}$,
- (c) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$,
- (d) $f(x) = (5 + 3^x)^2$.

Definicija 1.1.5 Funkciju $f(x)$ definiranu u simetričnom području $-l < x < l$ (ovdje $l \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$) nazivamo parnom ako je $f(-x) = f(x)$ i neparnom ako je $f(-x) = -f(x)$ za svako x iz domene od f .

1. Odredite parnost ili neparnost slijedećih funkcija:

$$(a) \quad f(x) = x^2 - x^4,$$

- (b) $f(x) = \sin(\cos x)$,
- (c) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$,
- (d) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$,
- (e) $f(x) = \frac{|x|+1}{(1-x^2)\sin x}$,
- (f) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

2. Dokažite da svaku funkciju koja je definirana na simetričnom intervalu $-l < x < l$ možemo predočiti kao zbroj parne i neparne funkcije.
3. Dokažite da je produkt dviju parnih ili dviju neparnih funkcija parna funkcija, a produkt parne funkcije sa neparnom da je neparna funkcija.

Definicija 1.1.6 Funkciju f nazivamo periodičkom ako postoji pozitivan broj T takav da je $f(x+T) = f(x)$ za sve x iz domene od f . Najmanji pozitivan broj T sa gornjim svojstvom naziva se period od f .

1. Provjerite da li sljedeće funkcije periodične i ako jesu, odredite njihov period.
 - (a) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$,
 - (b) $f(x) = 3 \cos x + \cos 2x$,
 - (c) $f(x) = \cos 3\pi x + \sin 2\pi x$,
 - (d) $f(x) = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x$,
 - (e) $f(x) = 2^{\sin x}$.

Definicija 1.1.7 Neka je formulom zadana neka funkcija f . Područje definicije te funkcije je skup svih onih realnih brojeva za koje propisane operacije u formuli daju određenu realnu vrijednost. Taj skup realnih brojeva označavamo sa $D(f)$.

1. Odredite domenu od f ako je:
 - (a) $f(x) = \arcsin \left(\log \frac{x}{10} \right)$,
 - (b) $f(x) = \sqrt{\sin(\arcsin x)} + \sqrt{x^3 - \frac{1}{4}x}$,
 - (c) $f(x) = \log_x (-x^4 + 245x^2 - 9604) + \frac{\sqrt{\sin x}}{x-8}$,
 - (d) $f(x) = \sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{(x+1)^2}}$,
 - (e) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + (1 - \log_2 x)^{-2}$,
 - (f) $f(x) = \sqrt{\arcsin x + \arccos x} + \sqrt{\log_x(x-0.5)}$,
 - (g) $f(x) = \sqrt{\sin 2x} + \log \frac{2+x}{2-x}$,
 - (h) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(\log_{\frac{2}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x - 2)$,
 - (i) $f(x) = \sqrt[4]{\log_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} x - 6} + \arccos \frac{x^2-1}{x^2+1}$,
 - (j) $f(x) = (\log_3 x - \frac{1}{9} \log_x 3)^{-1} ((1-2x)(5x-6-x^2))^{\frac{1}{2}}$.

1.2 Limesi

1.2.1 Definicija i osnovna pravila računanja

Definicija 1.2.1

1° *Limes niza: Broj a nazivamo limesom niza $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ i označavamo*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takav broj $N = N(\varepsilon)$ da je

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{za } n > N.$$

2° *Limes funkcije: Kažemo da funkcija f teži u A , (oznaka $f(x) \rightarrow A$) kada x teži u a , (oznaka $x \rightarrow a$) i pišemo*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{za } 0 < |x - a| < \delta.$$

Analogno je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

ako je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za $|x| > N(\varepsilon)$. Po dogovoru pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

ako za svaki pozitivan broj E možemo naći $\delta(E) = \delta > 0$ tako da je

$$|f(x)| > E \quad \text{za } 0 < |x - a| < \delta.$$

Vrijedi sljedeće: ako postoje limesi $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, onda

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}$ ako $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$.

1. Koristeći definiciju limesa, dokažite:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+2} \neq 1, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 31n + 4}{2n^2 + 17n - 57} = \frac{1}{2}.$$

2. Neka je $x_1 = 0.23$, $x_2 = 0.233$, $x_3 = 0.2333$, ..., $x_n = 0.233\dots 3$ itd.
Odredite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3. Odredite pomoću definicije limesa

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}.$$

4. Izračunajte

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Ako tražimo limes kvocijenta dvaju polinoma u x kada $x \rightarrow \infty$, preporučljivo je oba člana kvocijenta prethodno podijeliti sa x^n gdje je n najveća potencija tih polinoma. analogno postupamo i u mnogim slučajevima razlomaka sa iracionalnim izrazima.

Ako su, nadalje, $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi i $P(a) \neq 0$ ili $Q(a) \neq 0$, limes

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dobivamo direktno. U slučaju da $P(a) = Q(a) = 0$, razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dijelimo sa $(x-a)$ onoliko puta dok ne dođemo u situaciju gdje možemo računati direktno.

1. Izračunajte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+4)^3(3x-1)^2}{x^5+6}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-4}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{3x+\sqrt[3]{x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$$

$$(d) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

Limese koji sadrže iracionalne izraze možemo često dovesti u racionalni oblik uvođenjem nove varijable. Drugi način rješavanja takvih limesa je prebacivanje iracionalnosti iz brojnika u nazivnik ili obrnuto.

1. Izračunajte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-2}\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+a)} - x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1+x}}{x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$(d) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3})$$

Za računanje limesa korisne su sljedeće formule:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Neka je $f(x)$ pozitivna funkcija u nekoj okolini točke a ($a \neq x$). Pri određivanju limesa oblika

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = C,$$

vrijedi sljedeće:

1) ako egzistiraju konačni limesi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

gdje je $0 \leq A + \infty$ i $-\infty < B < +\infty$ tada je $C = A^B$.

2) ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ onda C pronalazimo neposredno,

3) ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, onda stavljamo $f(x) = 1 + \alpha(x)$ gdje $\alpha(x) \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow a$ i prema tome

$$C = \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1)g(x)}.$$

Koristeći gornja pravila lako dobivamo da je općenito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k.$$

1. Izračunajte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\arctan \frac{\pi}{2}x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}$

2. Izračunajte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \right)^{\frac{\sin x}{x}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Ako egzistira i pozitivan je $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, onda

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x)).$$

Pomoću toga odmah dobivamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x))^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$$

1. Izračunajte:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2))$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$

1.2.2 L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo: koristi se za neodređene oblike tipa $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Neka su zadane funkcije f i g derivabilne za $0 < |x - a| < \varepsilon$ pri čemu je derivacija $g'(x)$ različita od nule. Ako su f i g obje beskonačno male ili obje beskonačno velike kada $x \rightarrow a$, tj. ako razlomak $\frac{f(x)}{g(x)}$ predstavlja u toj točki $x = a$ neodređeni oblik tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, onda je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod uvjetom da limes kvocijenta derivacija postoji.

Ako razlomak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova daje neodređeni oblik u točki $x = a$ jednog od dva navedene tipa i $f'(x)$, $g'(x)$ udovoljavaju ranije navedenim zahtjevima za $f(x)$ i $g(x)$, onda se može prijeći na kvocijent drugih derivacija itd.

Da bi našli vrijednosti neodređenog oblika $0 \cdot \infty$ pretvaramo odgovarajući produkt $f_1(x) \cdot f_2(x)$, gdje je $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$, u razlomak oblika

$$\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0} \right) \quad \text{ili} \quad \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{\infty}{\infty} \right).$$

U slučaju neodređenog oblika $\infty - \infty$ treba odgovarajuću razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvoriti u produkt $f_1(x) \left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right)$ i riješiti prvo neodređeni oblik $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$. Ako je kojim slučajem $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, onda razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvaramo u

$$\frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0} \right).$$

1. Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte:

- | | |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1)$ | (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ |

Zadaci sa rokova:

1. Izračunajte:

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x + (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \right)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{\sqrt{x} - 1}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x \ln(1+x)}{\tan x - \sin x}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 4 \cos x + 3 \cos^2 x}{x^2}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi}{3}} \frac{1 + 2 \cos \frac{\pi}{2}}{3x - 4\pi}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos x} - x \tan x \right)$ |

1.3 Deriviranje funkcija

1.3.1 Tablično deriviranje i osnovna pravila

Definicija 1.3.1 Derivacijom $f'(x_0)$ funkcije f u točki x_0 nazivamo limes kvocijenta $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kada x teži u x_0 , odnosno

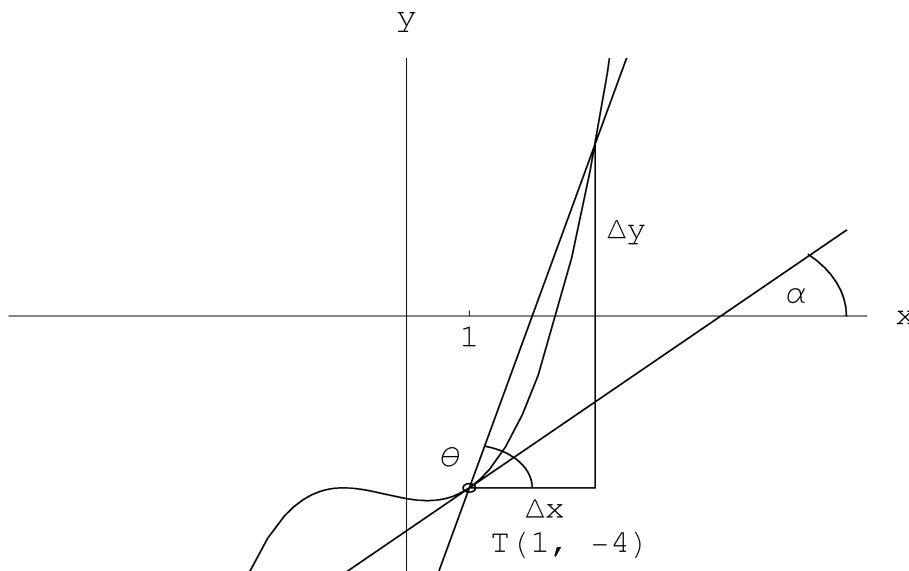
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ako taj limes postoji. U tom slučaju kažemo da je funkcija f derivabilna u točki x_0 . Uobičajeno je pisati i

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

gdje Δx označava razliku $\Delta x = x - x_0$ i analogno $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$.

Vrijednost derivacije $f'(x_0)$ daje koeficijent smjera tangente u točki x_0 na graf funkcije f (vidi sliku). Određivanje derivacije nazivamo *deriviranjem funkcije*.



Slika 1.1: Očito je $\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pa dobivamo $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$

1. Koristeći definiciju derivacije, izračunajte derivaciju sljedećih funkcija:

- $f(x) = x$,
- $f(x) = x^n$ gdje je $n \in \mathbb{N}$,
- $f(x) = \sqrt{x}$,
- $f(x) = \sin x$.

Osnovna pravila deriviranja: Neka je c konstanta a f i g funkcije koje imaju derivacije. Onda je

- 1) $(c)' = 0$,
- 2) $(x)' = 1$,
- 3) $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- 4) $(cf)' = cf'$,
- 5) $(fg)' = f'g + fg'$,
- 6) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ($g \neq 0$).

2. Koristeći definiciju derivacije, dokažite gornja pravila.

3. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = x^5 + x^{\frac{3}{2}} + 2x$ | (e) $f(x) = 6 \sin x + \cos x$ |
| (b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ | (f) $f(x) = x^2 \tan x$ |
| (c) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \ln 2$ | (g) $f(x) = (x^3 + 5x)e^x$ |
| (d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ | (h) $f(x) = \ln x \arcsin x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ |

Pravilo deriviranja složenih funkcija: Ako je $h = f \circ g$ složena funkcija, a funkcije f i g imaju derivacije u $g(x)$, tj x , onda je

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ili kraće

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

4. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x) = \sqrt{\frac{5 \sin x - \cos x}{x}}$ | (e) $f(x) = \sqrt{\ln x + x} + \ln \sqrt{x} + x$ |
| (b) $f(x) = \cos(xe^x + x^2)$ | (f) $f(t) = t^2 \sin e^t$ |
| (c) $f(x) = x^3 10^{x^2+6x}$ | (g) $f(x) = \left(\frac{ax^n+b}{cx^n-d}\right)^m$ |
| (d) $f(x) = \ln(4 \sin x - \arccos 2x)$ | (h) $f(x) = \arctan \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}$. |

5. Izračunajte $f'(x)$ ako je

- | | | |
|--------------------|---------------------|------------------------|
| (a) $f(x) = x $, | (b) $f(x) = x x $, | (c) $f(x) = \ln x $. |
|--------------------|---------------------|------------------------|

6. Izračunajte $f'(x)$ i $f'(0)$ ako je $f(x) = e^{-5x} \sin 3x$.

7. Pokažite da je $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ ako je $f(x) = \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

8. Pokažite da je $((\sin x)^n \cos(nx))' = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$.

9. Pokažite da funkcija $y = xe^{-x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xy' = (1-x)y$.

Logaritamsko deriviranje: Logaritamskom derivacijom funkcije $y = f(x)$ nazivamo derivaciju logaritma te funkcije, tj.

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Primjer 1 Primjenom gornjeg logaritmiranja nađimo derivaciju funkcije $f(x) = x^x$.

Rješenje: Logaritmiranjem dobivamo:

$$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x.$$

Deriviramo obje strane jednadžbe po x i dobivamo:

$$[\ln f(x)]' = (x \ln x)',$$

odnosno

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1.$$

Oдавde slijedi

$$f'(x) = f(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

1. Primjenom logaritamskog deriviranja izračunajte $f'(x)$ ako je:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = x^{\sin x}$

(b) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

(e) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(c) $f(x) = x^{x^2}$

(f) $f(x) = x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x^x}$.

Derivacija inverzne funkcije: Neka f ima inverznu funkciju g . Ako je $f'(x) \neq 0$, onda imamo:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primjer 2 Nađite derivaciju funkcije $f(y) = \arcsin y$ koristeći gornje pravilo.

Rješenje: Kako je $\arcsin y$ inverzna funkcija funkcije $\sin x$, imamo (za $y = \sin x$):

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

1. Izračunajte $f'(x)$ ako je

(a) $f(x) = \arccos x$, (b) $f(x) = \arctan x$, (c) $f(x) = \operatorname{arcsch} x$.

2. Nađite derivaciju inverzne funkcije ako je $f(x) = x - \frac{1}{2} \sin x$. Izračunajte $(f^{-1})'(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2})$.

3. Nađite derivaciju inverzne funkcije ako je $f(x) = x^3 - 1$. Izračunajte $(f^{-1})'(7)$.

Derivacija implicitno zadane funkcije: Neka je funkcija $y = f(x)$ zadana u implicitnom obliku

$$F(x, y) = 0.$$

Onda derivaciju y' možemo naći tako da izračunamo derivaciju po x funkcije F , izjednačimo je s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu po y' .

Primjer 3 Nađite derivaciju funkcije zadane implicitno sa

$$x^3 + x^2y + y^2 = 0.$$

Rješenje: Ovdje je $F(x, y) = x^3 + x^2y + y^2$. Deriviramo tu funkciju po x i dobivamo:

$$\frac{d}{dx}F(x, y) = 3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy'.$$

Izjednačimo gornju derivaciju sa nulom

$$3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0$$

i riješimo dobivenu jednadžbu po y' :

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}.$$

1. Odredite y' ako je

$$(a) \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0, \quad (b) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad (c) \quad xy = \arctan \frac{x}{y}.$$

2. Odredite y' i y'' u točki $T(1, 1)$ ako je

$$(a) \quad ye^y = e^{x+1}, \quad (b) \quad \ln y + \frac{x}{y} = c, \quad (c) \quad \arctan(x + y) = x.$$

3. Nađite y' u točki $T(1, 2)$ ako je

$$y^2 = x + \ln \frac{y}{x}.$$

Zadaci sa tangentama i normalama na krivulju:

1. Odredite jednadžbu tangente i normale krivulje $f(x) = \arccos 3x$ u točki u kojoj ta krivulja siječe os ordinatu.
2. Odredite jednadžbu tangente krivulje $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ u točki $T(1, 0)$.
3. Odredite jednadžbu tangente povučene iz točke $T(-2, -3)$ na krivulju $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.
4. Odredite jednadžbu tangente i normale krivulje $y^4 = 4x^4 + 6xy$ u točki $T(1, 2)$.
5. Pod kojim se kutom sijeku krivulje $y = x^2$ i $y = x^3$?
6. Pod kojim kutem krivulja $y = e^{2x}$ siječe os y ?

1.3.2 Ekstremi funkcija i primjene derivacija

Ekstremi funkcije: Neka je zadana funkcija f . Ako postoji okolina točke x_0 takva da za svaku točku $x \neq x_0$ te okoline vrijedi nejednakost $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), onda točku x_0 nazivamo lokalnim minimumom (maksimumom) funkcije f . Točku lokalnog minimuma ili maksimuma funkcije nazivamo točkom lokalnog ekstrema. Ako je x_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f , onda je nužno ili $f'(x_0) = 0$ (stacionarna točka) ili $f'(x_0)$ ne postoji (vidi sliku). Obrat ne vrijedi, točke u kojima $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji (kritične točke) nisu uvijek točke ekstrema. Dovoljni uvjeti za lokalne ekstreme funkcije su sljedeći:

1. ako postoji okolina $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ kritične točke x_0 takva da je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ onda je x_0 točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije f . Ako nađemo takav pozitivan broj δ da $f'(x)$ zadržava nepromijenjeni predznak na intervalu $0 < |x - x_0| < \delta$, onda f nema lokalni ekstrem u x_0 . Ti uvjeti analogni su sljedećem:
2. ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), onda je x_0 točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije; ako je pak $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$, onda x_0 nije točka ekstrema funkcije.

Primjer 1 Nađite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Rješenje: Prvo ispitujemo koje točke zadovoljavaju nužan uvjet, tj. za koje točke je $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Rješimo gornju kvadratnu jednadžbu i dobivamo kandidate za ekstreme: $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Provjeravamo vrijednost druge derivacije od f u tim točkama.

$$f''(x) = 12x + 6 \quad \text{pa} \quad f''(x_1) = 18, \quad f''(x_2) = -18.$$

Zaključujemo da f ima lokalni minimum u $x_1 = 1$ i lokalni maksimum u $x_2 = -2$.

1. Istražite ekstreme sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2(x - 12)^2$

(d) $f(x) = x - \ln(1 + x)$

(b) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

(e) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(c) $f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x$

(f) $f(x) = x - \arctan x$.

Najveće i najmanje vrijednosti: Najmanja (najveća) vrijednost funkcije f na zadanom intervalu $[a, b]$ dobiva se ili u kritičnim točkama funkcije ili na krajevima intervala.

Primjer 2 Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ na intervalu $[-3, 2]$.

Rješenje: Prvo tražimo kritične točke funkcije f . Kako je $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, kandidati su $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Obje točke nalaze se u zadanom

intervalu pa provjeravamo vrijednost funkcije:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(1) = 2 + 3 - 12 - 1 = 8, \\ \text{i } f(x_2) &= f(-2) = -16 + 12 + 24 - 1 = 12. \end{aligned}$$

Ostaje ispitati ponašanje funkcije na rubovima:

$$\begin{aligned} f(-3) &= -54 + 27 + 36 - 1 = 8, \\ \text{i } f(2) &= 16 + 12 - 24 - 1 = 3. \end{aligned}$$

Zaključujemo da najmanja vrijednost na intervalu $[-3, 2]$ funkcija $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ postiže na rubu $x = 2$ a najveću u točki $x = -2$.

1. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije na zadanom intervalu (ako interval nije označen, misli se na cijelu domenu).

- (a) $f(x) = x^3 - 3x$ na intervalu $[-2, 3]$,
- (b) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$,
- (c) $f(x) = \arcsin x$,
- (d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

2. Pokažite da za pozitivne vrijednosti od x vrijedi nejednakost:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Rješenje: Gledamo funkciju $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$ i ispitujemo njezin minimum na intervalu $[0, +\infty)$. Tražimo kritične točke i deriviranjem dobivamo kandidate:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

U zadanom intervalu je samo $x = 1$ i tu je $f(1) = 0$. Na rubovima intervala funkcija teži u $+\infty$ pa zaključujemo da je u $x = 1$ postignuta minimalna vrijednost i ona iznosi nula. Drugim riječima, vrijedi:

$$x \in [0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

što je i trebalo dokazati.

3. Dokažite nejednakosti:

- (a) $e^x > 1 + x$ za $x \neq 0$,
- (b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ za $x \neq 0$.

4. U skupu nenegativnih realnih brojeva odredite onaj koji zbrojen sa svojom recipročnom vrijednošću daje maksimalan zbroj. Odredite taj zbroj!

5. Na krivulji $f(x) = \sqrt{-\ln x}$ odredite točku najbližu ishodištu.

6. Od svih stožaca upisanih u kuglu polumjera $R = 1$ odredite onaj maksimalnog volumena.

Zadaci sa rokova:

1. Među svim jednakokračnim trokutima opsega 16 nađite onaj koji ima najveću površinu.
2. Nađite kut među krivuljama: $C_1 \dots x^2 + 12x + y^2 - 4y + 15 = 0$,
 $C_2 \dots x - y^2 + 4y - 3 = 0$.
3. Nađite kut među krivuljama: $C_1 \dots x = 0$, $C_2 \dots y = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$.
4. Među svim jednakokračnim trokutima s jednim vrhom u ishodištu i sa druga dva vrha na krivulji $y = \frac{1}{x^2}$, nađite onaj koji ima minimalni opseg.
5. U zadanu sferu upišite valjak maksimalnog obujma.
6. Iz točke $T(0, 2)$ povucite tangente na krivulju $y + \ln x^2 = 0$.
7. Na krivulju $C \dots y - x^3 + 3x^2 - 2x = 0$ povucite tangentu koja je okomita na pravac $x + 11y - 12 = 0$.
8. Koji uvjet mora zadovoljavati funkcija $f(x) = x^3 + ax + b$ da bi njen graf dodirivao os x (naći vezu između a i b)?
9. Odredite normalu grafa funkcije $f(x) = e^{2x-2} + e^{x-1} - 2$ u točki u kojoj graf siječe x os.
10. Od tri daske širine 20cm treba napraviti žlijeb maksimalnog poprečnog presjeka. Kolika je površina tog poprečnog presjeka?
11. Među svim jednakokračnim trokutima opsega 1 mm nađite onaj koji ima najveću površinu.
12. Na krivulji $C \dots y - x^2 - \sqrt{5} = 0$ nađite točku najbližu točki $T(0, 1 + \sqrt{5})$. Slika!
13. Dokažite da za bilo koju vrijednost realnog parametra a postoji tangenta grafa funkcije $f(x) = x^3 - a^2x$ okomita na pravac $x + y = 0$.
14. Iz tjemena parabole $y = 3x^2 - 2x + 1$ povucite tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{2x-5}{3x-1}$. Slika!

1.3.3 Ispitivanje toka funkcije i crtanje grafa

Kod crtanja grafa funkcije moramo prvo u nekoliko koraka odrediti sljedeće parametre:

- (1) domena funkcije,
- (2) multočke,
- (3) asimptote,
- (4) kandidate za ekstreme (prva derivacija),
- (5) ekstreme i točke infleksije (druga derivacija),

(6) tok (prva derivacija).

Asimptote :

vertikalne asimptote: točke prekida funkcije

horizontalne asimptote: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow$ lijeva horizontalna asimptota,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow$ desna horizontalna asimptota

kosa asimptota: $y = kx + l$ gdje je $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,
 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Ekstremi i točke infleksije :

$f'(x_0) = 0 \rightarrow x_0$ je kandidat; $f''(x_0) > 0$ lokalni minimum,
 $f''(x_0) < 0$ lokalni maksimum,
 $f''(x_0) = 0$ ili $f''(x_0)$ ne postoji
će biti točka infleksije ako f'' u intervalima
 $(x_0 - \delta, x_0)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$ za neko δ zadržava
konstantne predznake i ako su ti predznaci
suprotni.

Tok :

$f'(x) > 0$ funkcija raste,
 $f'(x) < 0$ funkcija pada.

Primjer 1 Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2}$.

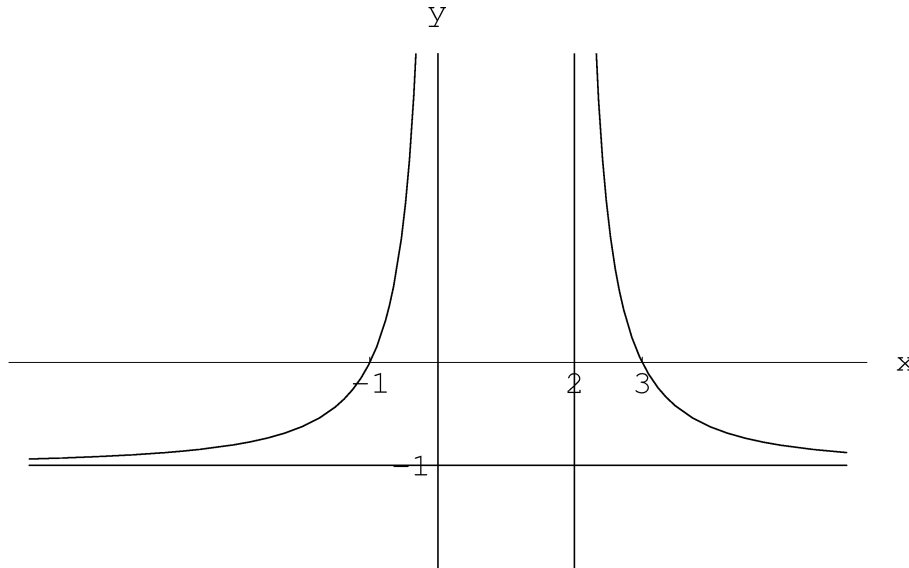
Rješenje: Jednostavno slijedimo upute:

- (1) Domena: $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$ pa je domena $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.
- (2) Nultočke: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$
 $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow$
 $x_1 = -1 \quad (-1, 0),$
 $x_2 = 3 \quad (3, 0).$
- (3) Asimptote:
V.A. $x = 0, x = 2$
H.A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2} = -1$ pa je horizontalna asimptota $y = -1$.
K.A. nema
- (4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = \dots = \frac{-6x+6}{(2x-x^2)^2}$ pa $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.
- (5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \dots = \frac{-6-2(-6x+6)(2x-x^2)(2-2x)}{(2x-x^2)^4}$.
Sada imamo

$$f''(1) = -6 < 0 \quad \text{pa je u } x = 1 \text{ lokalni maksimum.}$$

(6) Tok:

$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty)$ pa tu funkcija pada,
 $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$ pa tu funkcija raste.



Slika 1.2: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2}$

Na temelju gornjih opažanja sada je lako nacrtati graf:

Primjer 2 Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

Rješenje:

(1) Domena: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

(2) Nultočke: $x = 0$

(3) Asimptote:

V.A. nema

H.A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = 0$ pa je horizontalna asimptota u oba smjera $y = 0$.

K.A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0$ pa kosih asimptota nema.

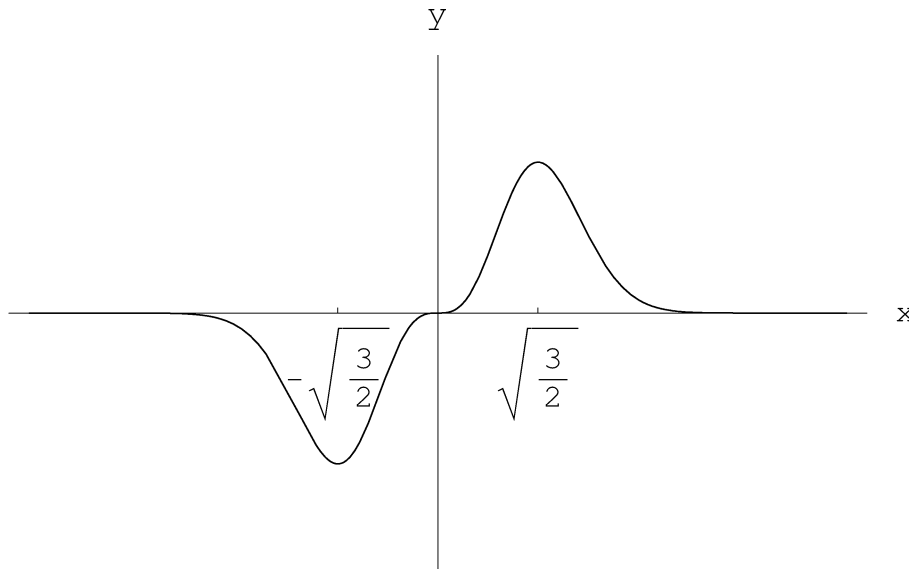
(4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2} (-2x) = 0$ pa su kandidati $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$.

(5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \dots = xe^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6)$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
 f''(0) &= 0 \text{ pa je } x = 0 \text{ točka infleksije,} \\
 f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &< 0 \text{ pa je u } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ lokalni maksimum,} \\
 f''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &> 0 \text{ pa je u } x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ lokalni minimum.}
 \end{aligned}$$

- (6) Tok: $f'(x) < 0 \Rightarrow 3 - 2x^2 < 0 \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa tu funkcija pada,
 a $f'(x) > 0 \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa na tom intervalu funkcija raste.

Crtamo graf:



Slika 1.3: Graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

Zadaci sa rokova:

1. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = e^{\sin x}$.
2. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
4. Odredite graf funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.
5. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = (1 + x^3)^{-1}$.
6. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \arctan x - x$.
7. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.
8. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln 2$.
9. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^2 2^{-x}$.
10. Nacrtajte kvalitativni graf funkcije $f(x) = 1 - e^{-\cos x}$.
11. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^3 + 8x^2 + 27x + 27}{2(x+2)^2}$.
12. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = x - 1 + e^{\frac{1}{1-x}}$.

13. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = \arctan(1 - \frac{1}{x})$.
14. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$.
15. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.
16. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = (x - 1)^{-1/2} \cdot \ln(x - 1)$.
17. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.
18. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.
19. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$.